Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – Théorie de la Gravitation

– Cinquième séance d'exercices –

`vecteurs de Killing & métrique de Schwarzschild`

Les corrections sont intercalées entre les énoncés et entourées d'un cadre similaire à celui-ci. Nous omettons de reproduire les corrections de certains exercices complémentaires (ou de certaines parties d'exercices) marqués d'une étoile (*). Si discuter de la résolution de l'un de ces problèmes vous intéresse, venez directement me trouver !

***Exercice 0 : quantités conservées et géodésiques.** Montrer que la quantité

$$Q_\xi \equiv \xi_\mu \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$$

est conservée le long d'une géodésique quelconque $x^\mu(\lambda)$ si et seulement si ξ_μ est un vecteur de Killing.

Correction.
Il nous faut démontrer l'assertion dans les deux sens.

- Soit ξ^μ un vecteur de Killing. Notons $u^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}Q_\xi &= u^\alpha \nabla_\alpha Q_\xi \\ &= u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \xi_\beta + u^\alpha \xi_\beta \nabla_\alpha u^\beta \\ &= u^\alpha u^\beta \nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)} + u^\alpha \xi_\beta \nabla_\alpha u^\beta \\ &= 0.\end{aligned}$$

  Le premier terme s'annule en vertu de l'équation de Killing ($\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)} = 0$), tandis que le second est égal à zéro grâce à l'équation géodésique $u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$.
  C'est le sens habituel dans lequel cette proposition est démontrée dans la plupart des livres de référence. Néanmoins, nous allons montrer qu'elle est aussi valide dans l'autre sens, c-à-d que si l'on veut que Q_ξ soit conservé le long de toute trajectoire géodésique, cela implique automatiquement que ξ^μ doit être un vecteur de Killing.
- Imposons donc que Q_ξ soit conservé :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}Q_\xi = 0.$$

  En utilisant la forme explicite de Q_ξ et l'équation géodésique, cette contrainte se réduit à

$$u^\alpha u^\beta \nabla_\alpha \xi_\beta = 0,$$

qui doit être vérifiée quel que soit u^α (a priori quelconque, puisque l'on considère une géodésique arbitraire). On doit donc avoir

$$\nabla_{(\alpha}\xi_{\beta)} = 0,$$

c-à-d que ξ^μ doit être un vecteur de Killing.

Exercice 1 : vecteurs de Killing de l'espace-temps plat. Calculer les vecteurs de Killing de l'espace-temps de Minkowski et (*) déterminer l'algèbre qu'ils génèrent.

Correction. Partons de l'équation de Killing en espace-temps plat, qui se réduit à

$$\partial_{(\alpha}\xi_{\beta)} = 0 \Leftrightarrow \partial_\alpha\xi_\beta + \partial_\beta\xi_\alpha = 0. \tag{1}$$

En appliquant l'opérateur ∂_ρ sur cette équation, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\rho\partial_\alpha\xi_\beta + \partial_\rho\partial_\beta\xi_\alpha \\ &= 3\underbrace{\partial_{(\rho}\partial_\alpha\xi_{\beta)}}_{=0} - \partial_\alpha\partial_\beta\xi_\rho - \partial_\rho\partial_\beta\xi_\alpha + \partial_\rho\partial_\beta\xi_\alpha \\ &= -\partial_\alpha\partial_\beta\xi_\rho. \end{aligned}$$

L'équation de Killing (1) implique donc

$$\partial_\alpha\partial_\beta\xi_\rho,$$

c'est-à-dire que les fonctions ξ^ρ doivent être au plus linéaires en x^μ. Posons donc

$$\xi^\mu = a^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu.$$

Il nous faut à présent déterminer les contraintes qui s'appliquent sur les coefficients a^μ et $\omega^\mu{}_\nu$ en injectant cet Ansatz dans l'équation de Killing (1). On obtient

$$\begin{aligned} &\partial_\alpha(\omega_{\beta\nu}x^\nu) + \partial_\beta(\omega_{\alpha\nu}x^\nu) = 0 \\ \Leftrightarrow &\omega_{\beta\alpha} + \omega_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de contrainte sur les a^μ (et on peut en choisir N indépendants en dimension d'espace-temps N), tandis que les $\omega_{\alpha\beta}$ doivent être antisymétriques, on peut donc en choisir $\frac{N(N-1)}{2}$ indépendants. Au total, dans l'espace de Minkowski de dimension N, on peut donc construire

$$N + \frac{N(N-1)}{2} = \frac{N(N+1)}{2}$$

vecteurs de Killing indépendants. Notons qu'une base de vecteurs indépendants est donnée par

$$\begin{aligned} P_\mu &\equiv \partial_\mu, \\ L_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2}\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right). \end{aligned}$$

Un bon exercice (*) est de calculer l'algèbre qu'ils génèrent. On voit alors que les P_μ sont les générateurs des translations tandis que les $L_{\mu\nu}$ sont les générateurs des transformations de Lorentz homogènes (boosts et rotations spatiales).

***Exercice 2 : vecteurs de Killing de $\mathcal{S}^2$.** La métrique de la sphère bi-dimensionnelle de rayon a est

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad \theta \in [0,\pi], \phi \in [0, 2\pi] \,.$$

Calculer les trois vecteurs de Killing indépendants de cette sphère et déterminer l'algèbre qu'ils génèrent.

Correction. D'après la séance 4, les seules coefficients non-nuls de la connexion sont

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \quad , \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta.$$

Les vecteurs de Killing sont solutions des équations $\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0$, ce qui donne les trois équations suivantes :

$$\partial_\theta\xi_\theta = 0, \tag{2}$$
$$\partial_\theta\xi_\phi + \partial_\phi\xi_\theta - 2\cot\theta\xi_\phi = 0, \tag{3}$$
$$\partial_\phi\xi_\phi + \sin\theta\cos\theta\xi_\theta = 0. \tag{4}$$

La première équation impose que ξ_θ soit uniquement une fonction de ϕ. En prenant la dérivée selon θ de (3), on obtient l'équation suivante uniquement pour ξ_ϕ :

$$\partial_\theta^2\xi_\phi - 2\partial_\theta(\cot\theta\xi_\phi) = 0,$$

qui a pour solution

$$\xi_\phi = C_1(\phi)\sin^2\theta + C_2(\phi)\sin\theta\cos\theta.$$

En remettant cela dans l'équation (3), on trouve que

$$\xi_\theta = \int C_2(\phi)d\phi.$$

Il nous reste à utiliser la dernière équation (4) pour trouver la forme des fonctions $C_1(\phi)$ et $C_2(\phi)$. Pour cela, on applique ∂_ϕ sur (4) et en utilisant les résultats partiels pour ξ_θ et ξ_ϕ, on obtient 2 équations indépendantes pour $C_1(\phi)$ et $C_2(\phi)$:

$$C_1''(\phi) = 0 \Rightarrow C_1(\phi) = A_1\phi + B_1,$$
$$C_2''(\phi) + C_2(\phi) = 0 \Rightarrow C_2(\phi) = A_2\sin\phi + B_2\cos\phi.$$

En réinjectant cela dans (4), on trouve que $A_1 = 0$. On a donc les solutions suivantes :

$$\xi_\phi = B_1\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta(A_2\sin\phi + B_2\cos\phi),$$
$$\xi_\theta = -A_2\cos\phi + B_2\sin\phi,$$

ce qui donne 3 vecteurs de Killing indépendants

$$\begin{aligned}
\xi^\mu_{(1)}\partial_\mu &= \partial_\phi, \\
\xi^\mu_{(2)}\partial_\mu &= \cos\phi\partial_\theta - \cot\theta\sin\phi\partial_\phi, \\
\xi^\mu_{(3)}\partial_\mu &= -\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta\cos\phi\partial_\phi,
\end{aligned}$$

qui obéissent à l'algèbre de SO(3)

$$\left[\xi^\mu_{(i)}\partial_\mu, \xi^\mu_{(j)}\partial_\mu\right] = \varepsilon_{ijk}\xi^\mu_{(k)}\partial_\mu$$

Exercice 3 : géodésiques de Schwarzschild – conservation du moment angulaire. De par sa symétrie sphérique, la métrique de Schwarzschild possède trois vecteurs de Killing de type espace :

$$\begin{aligned}
R &= \partial_\varphi\,, \\
S &= \cos\varphi\,\partial_\theta - \cot\theta\sin\varphi\,\partial_\varphi\,, \\
T &= -\sin\varphi\,\partial_\theta - \cot\theta\cos\varphi\,\partial_\varphi\,.
\end{aligned}$$

a. Utiliser ces vecteurs de Killing pour montrer que

$$\ell^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} \qquad \text{où } p_\mu = m\,\frac{dx_\mu}{d\tau}$$

est une constante du mouvement le long des géodésiques.

Correction. En utilisant directement le résultat démontré à l'exercice 0 (et au cours théorique), on sait que les trois quantités

$$\begin{aligned}
Q_R &= p_\phi, \\
Q_S &= \cos\phi p_\theta - \cot\theta\sin\phi p_\phi, \\
Q_T &= -\sin\phi p_\theta - \cot\theta\cos\phi p_\phi
\end{aligned}$$

sont conservées le long des géodésiques. On a défini ici la quadri-impulsion

$$p_\mu \equiv m\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$$

où $m^2 = -p_\mu p^\mu$. Un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}
\ell_\perp^2 &\equiv Q_S^2 + Q_T^2 \\
&= p_\theta^2 + \cot^2\theta p_\phi^2.
\end{aligned}$$

Par construction, cette quantité est également conservée le long des géodésiques.

Nous l'avons introduite ici car elle sera utile au point suivant. Enfin, on construit

$$\begin{aligned}\ell^2 \equiv Q_R^2 + Q_S^2 + Q_T^2 \\ &= \ell_\perp^2 + Q_T^2 \\ &= p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}.\end{aligned}$$

Par construction, cette quantité est également conservée le long des géodésiques.

b. En déduire que les géodésiques de la métrique de Schwarzschild sont planaires.

Correction.
Grâce à la symétrie sphérique de la métrique de Schwarzschild, on peut toujours placer notre système de coordonnée tel qu'il existe λ_0 satisfaisant à

$$\theta(\lambda_0) = \frac{\pi}{2}, \qquad p^\theta(\lambda_0) = 0.$$

La trajectoire est plane si

$$\theta(\lambda) = \frac{\pi}{2}, \qquad p^\theta(\lambda) = 0, \qquad \forall\lambda.$$

En évaluant $\ell_\perp^2$ en $\lambda = \lambda_0$, on trouve

$$\ell_\perp^2 = 0.$$

Or $\ell_\perp^2 = 0$ est conservé le long des géodésiques, donc sa valeur reste constante tout au long de la trajectoire. On a donc

$$p_\theta^2 + \cot^2\theta\, p_\phi^2 = 0, \qquad \forall\lambda.$$

Les deux termes du membre de gauche étant positifs ou nuls, on doit nécessairement avoir

$$p_\theta = 0, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall\lambda.$$

Le mouvement géodésique dans la métrique de Schwarzschild est donc bien planaire.

Exercice 4 : géodésiques de Schwarzschild – équations du mouvement. Montrer que les équations des géodésiques dans la métrique de Schwarzschild sont

$$\ddot{r} - \frac{1}{2}\nu'\dot{r}^2 - re^{\nu}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}e^{2\nu}\nu'\dot{t}^2 = 0, \tag{5a}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} = 0, \tag{5b}$$

$$\ddot{t} + \nu'\dot{r}\dot{t} = 0, \tag{5c}$$

où $\dot{}$ désigne une dérivation par rapport à λ et $'$ une dérivation par rapport à r.

Correction. Comme vu lors de l'exercice précédent, le mouvement géodésique dans Schwarzschild est planaire. Sans perte de généralité, on peut donc choisir

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \dot{\theta} = 0.$$

En utilisant les formes explicites des symboles de Christoffel non-nuls donnés dans l'« aide-mémoire », les équations géodésiques

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = 0$$

se réduisent bien à

$$\ddot{r} - \frac{1}{2}\nu'\dot{r}^2 - re^{\nu}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}e^{2\nu}\nu'\dot{t}^2 = 0 \tag{6}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} = 0, \tag{7}$$

$$\ddot{t} + \nu'\dot{r}\dot{t} = 0. \tag{8}$$

Les équations du mouvement obtenues à partir des symétries du problème sont

$$-e^{\nu}\dot{t}^2 + e^{-\nu}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \eta, \tag{9a}$$

$$r^2\dot{\phi} = a, \tag{9b}$$

$$e^{\nu}\dot{t} = b \tag{9c}$$

avec $\eta = -1$ (respectivement $\eta = 0$) pour une géodésique de genre temps (resp. de genre lumière). Montrez-le !

Correction. Si l'on paramétrise le mouvement géodésique par le temps propre, alors

$$\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}g_{\mu\nu} = \eta,$$

où $\eta = -1$ (resp. $\eta = 0$) pour une géodésique de genre temps (resp. de genre lumière). Explicitement, cette condition s'écrit

$$-e^{\nu}\dot{t}^2 + e^{-\nu}\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 = \eta.$$

D'autre part, ∂_{ϕ} est un vecteur de Killing de la métrique de Schwarzschild. Par conséquent, $\left(\partial_{\phi}\right)^{\mu}\dot{x}_{\mu}$ est conservé le long des géodésiques. Il existe donc une constante a telle que

$$\dot{x}_\phi = a \Leftrightarrow r^2\dot{\phi} = a.$$

Similairement, comme ∂_t est aussi un vecteur de Killing, il existe une constante b telle que

$$\dot{x}_t = -b \Leftrightarrow e^\nu \dot{t} = b.$$

On a donc bien retrouvé les trois équations annoncées !

Vérifier que ces équations impliquent bien les équations des géodésiques si $\dot{r} \neq 0$.

Correction. En dérivant les équations (9b) et (9c) par rapport à τ, on retrouve immédiatement les deux dernières équations géodésiques (5b) et (5c). Retrouver l'équation (5a) est un peu plus long : commençons par dériver (9a) par rapport à τ. On obtient

$$-2e^\nu \dot{t}\ddot{t} - e^\nu \nu' \dot{r}\dot{t}^2 + e^{-\nu} 2\dot{r}\ddot{r} - e^{-\nu}\nu'\dot{r}^3 + 2r\dot{r}\dot{\phi}^2 + 2r^2\dot{\phi}\ddot{\phi} = 0.$$

En remplaçant $\ddot{\phi}$ et $\ddot{r}$ par les expressions données par (5b) et (5c), il vient finalement

$$\ddot{r} - \frac{1}{2}\nu'\dot{r}^2 - re^\nu\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}e^{2\nu}\nu'\dot{t}^2 = 0,$$

qui est l'équation recherchée.